**ESERCIZI POLINOMI**

1. Scrivere il polinomio  come prodotto di fattori (*fattorizzare*, cioè, il polinomio).
2. Dimostrare che in  vale l’uguaglianza .
3. Si determinino *a*, e *b* in modo tale che i polinomi  e siano identici.
4. Eseguire nell’insieme dei polinomi  il prodotto . A cosa corrisponde questo prodotto in Ed in .
5. Si trovi un insieme in cui il polinomio  è riducibile.
6. Dato il polinomio , determinare *a*, *b*, *c* affinché . Supponiamo inoltre che la variabile *x* possa assumere soltanto i valori “naturali” 1, 2, 3,…Si dimostri che dalle differenze è possibile ottenere la formula della *somma dei primi N numeri naturali*.
7. Si sfruttino le considerazioni dell’esercizio precedente per calcolare, a partire dal polinomio , la somma dei quadrati dei primi N numeri naturali.
8. Si dica per quale valore di *h* il polinomio  è divisibile per .
9. Si sviluppino i seguenti prodotti notevoli: , .
10. Determinare il resto, senza eseguire la divisione, tra i polinomi  e .
11. Determinare *a*, *b* in modo tale che il polinomio  sia divisibile per .
12. Trovare tutte le radici, intere o razionali, del polinomio .
13. Tra i polinomi di secondo grado che divisi per  danno per resto 4, determinare quello che ha come radice .
14. E’ dato il polinomio  sull’insieme degli interi. Per quali valori di *n* è riducibile? In tal caso, si dica quant’è il valore dei coefficienti del polinomio di grado massimo che si viene a determinare nella divisione.
15. Dividere il polinomio per , e determinare i coefficienti del polinomio quoziente.
16. Si trovino le intersezioni tra la parabola di vertice  passante per l’origine, e l’iperbole .
17. Per quali valori di *k* la parabola di equazione  interseca l’iperbole  in punti ad ascissa intera?
18. Sia  un polinomio e . Dimostrare che è divisibile per il prodotto .
19. Dimostrare che un polinomio è divisibile per se la somma dei suoi coefficienti è zero.
20. Trovare tutte le radici di  in .

**Soluzioni**

1. 
2. .
3. .
4. .
5. in risulta, ad esempio, .
6. 

Dalla somma delle , otteniamo il valore della somma dei primi *n* numeri naturali:.

1. . Da questo segue .
2. Posto .
3. , 
4. Si ha .
5. Si determina il resto: .
6. Si osserva che  e sono radici del polinomio, quindi questo può essere scritto nella forma , con l’ultimo fattore irriducibile in R.
7. . Il polinomio può quindi essere scritto nella forma . Imponendo  otteniamo il polinomio:.
8. Il polinomio è riducibile se *n* è dispari. In tal caso è una radice, quindi può essere diviso per il polinomio ; di conseguenza . I coefficienti del polinomio quoziente di grado  si determinano eseguendo la moltiplicazione dei fattori presenti al membro di destra, ed imponendo *l’unicità* della forma canonica:  da cui seguono le uguaglianze , ottenute ponendo uguale a zero tutte le somme tra parentesi. Il quoziente è quindi .
9. . Poiché è una radice del polinomio, non c’è in realtà bisogno di fare grandi calcoli: si procede, con qualche adattamento, come nell’esercizio precedente:



1. Si mette a sistema l’equazione della parabola , con quella dell’iperbole, ottenendo l’equazione risolvente . Le soluzioni dell’equazione sono radici del polinomio ; poiché una di queste è , il polinomio può essere fattorizzato nel prodotto . Essendo il polinomio di secondo grado irriducibile nell’insieme dei numeri reali, l’unica intersezione tra la parabola e l’iperbole è rappresentata dal punto .
2. Dall’equazione risolvente  e dalla divisibilità per otteniamo la fattorizzazione , con resto zero . Il valore (o i valori) di *k* dipendono da quelli di *n* che forniscono radici intere del polinomio di secondo grado nella fattorizzazione. Questi valori si ottengono imponendo che il discriminante dell’equazione associata al fattore di secondo grado sia non negativo: . Per  otteniamo  e . Per  otteniamo  e l’iperbole non esiste.
3. Posto  , poiché è divisibile per  si ha . Ora, poiché nel caso in cui *n* è dispari  è divisibile per , essendo dispari, allora  è divisibile per , ovvero per . In definitiva, .
4. Per il teorema di Ruffini, la divisibilità per equivale a dire che è una radice del polinomio, quindi .
5. . Una radice è evidentemente . Le altre possono essere individuate, per la proprietà conseguente al teorema di Ruffini, tra i divisori del termine noto, che sono in , oltre a e , anche e , dal momento che . Sostituendo questi valori nel polinomio di secondo grado e svolgendo i calcoli con le classi di resto modulo 6, si trova che le soluzioni sono 0, 1, 2, 4, 5.